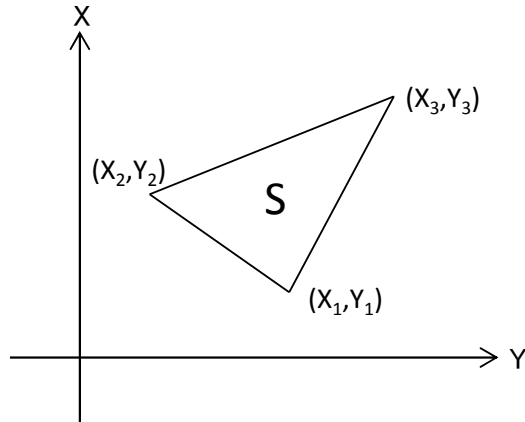


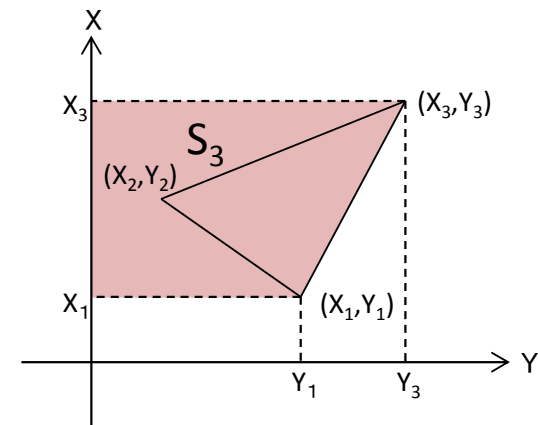
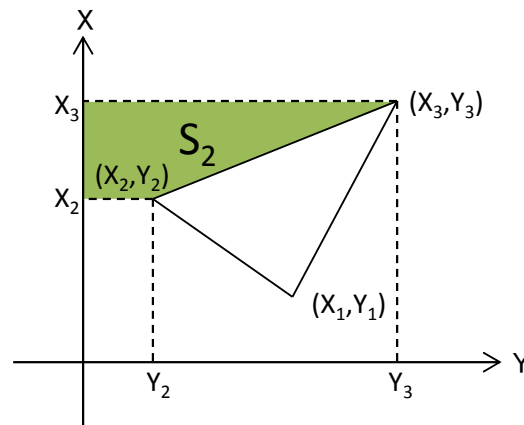
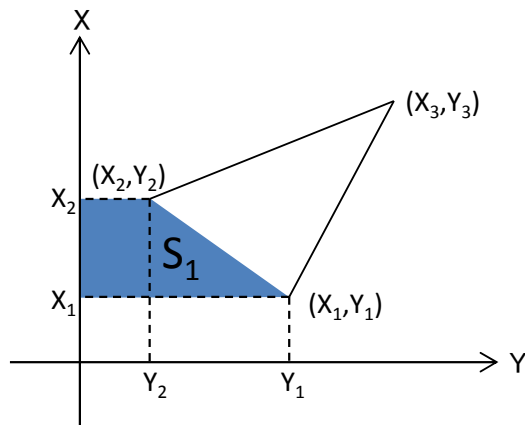
座標求積法

座標値による面積の計算方法について解説します。

下図のような三角形の面積(S)について考えます。



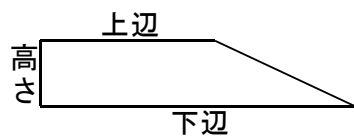
座標求積ではいくつかに分けた台形の面積を計算します。
計算する台形の数は一辺の数と同じです。
この例では三角形を求積するので、台形は3個です。



座標求積法

台形の面積は、以下の公式により計算できます。

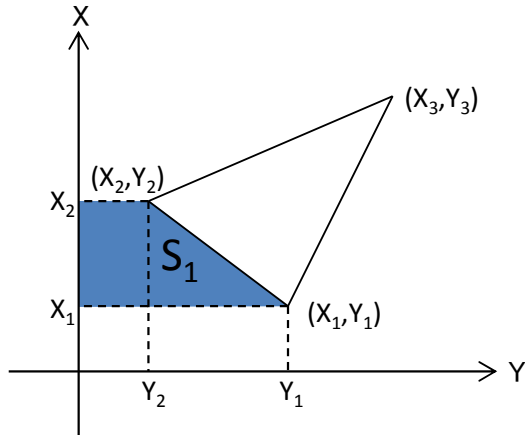
台形の面積 $=$ (上辺 $+$ 下辺) $\times$ 高さ $\div 2$



この公式を使って、それぞれの面積を計算していきます。

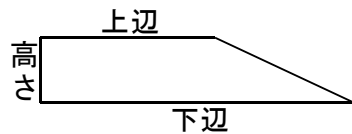
座標求積法

① S_1 の面積

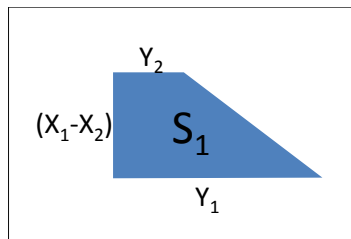


台形の面積の公式は、

台形の面積=(上辺+下辺)×高さ÷2



なので、 $S_1=(Y_2+Y_1) \times (X_1-X_2) \div 2$ で求積できます。



この時、 (X_1-X_2) は $X_1 > X_2$ と $X_1 < X_2$ とで正負(+/-)が異なります。

必ず、

$$X_n - X_{n+1}$$

や、

$$X_{n+1} - X_n$$

など、計算する順番を決めておきます。

この正負によって、各台形の面積の正負が決まります。

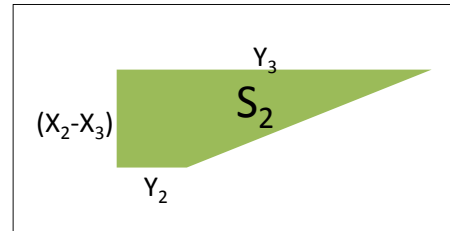
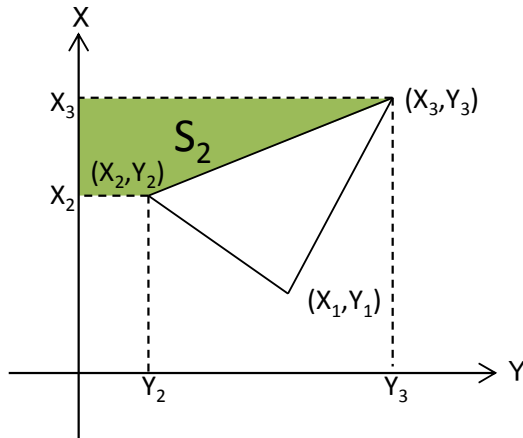
この例では、 $X_n - X_{n+1}$ で計算をすすめます。

※ (X_1-X_2) は負(-)なので、 S_1 は負(-)となる。

座標求積法

以下、同様にそれぞれの台形の面積を求めます。

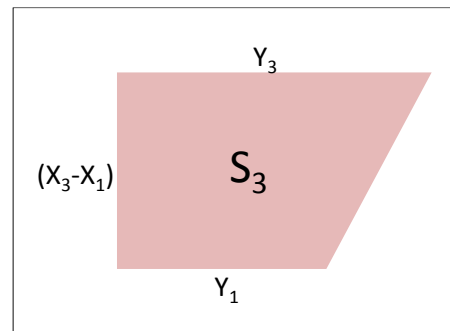
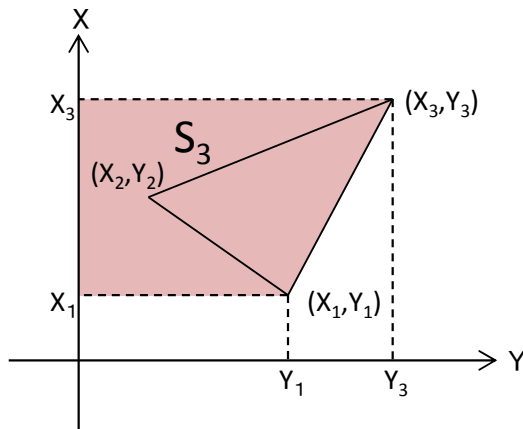
② S_2 の面積



$$S_2 = (Y_3 + Y_2) \times (X_2 - X_3) \div 2$$

※ $(X_2 - X_3)$ は負(-)なので、 S_2 は負(-)となる。

③ S_3 の面積



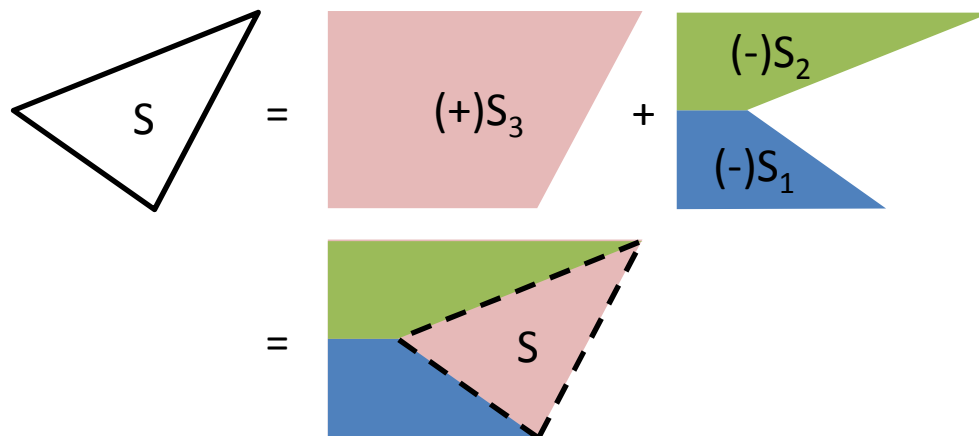
$$S_3 = (Y_3 + Y_1) \times (X_3 - X_1) \div 2$$

※ $(X_3 - X_1)$ は正(+)なので、 S_3 は正(+)となる。

座標求積法

①～③で計算した台形の面積を合計することで、 S の面積が求められます。

$$S = (-)S_1 + (-)S_2 + S_3 = S_3 - S_1 - S_2$$



座標求積法

以上のように、台形の面積の合計から任意の図形の面積が計算できます。

①～③の式を整理し一般化します。

$$\begin{aligned}\textcircled{1}' \quad S_1 &= (Y_2 + Y_1) \times (X_1 - X_2) \div 2 \\ &= (Y_2 X_1 - Y_2 X_2 + Y_1 X_1 - Y_1 X_2) \div 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2}' \quad S_2 &= (Y_3 + Y_2) \times (X_2 - X_3) \div 2 \\ &= (Y_3 X_2 - Y_3 X_3 + Y_2 X_2 - Y_2 X_3) \div 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3}' \quad S_3 &= (Y_3 + Y_1) \times (X_3 - X_1) \div 2 \\ &= (Y_3 X_3 - Y_3 X_1 + Y_1 X_3 - Y_1 X_1) \div 2\end{aligned}$$

$S = S_1 + S_2 + S_3$ なので

$$S = (Y_2 X_1 - \textcolor{red}{Y_2 X_2} + \textcolor{blue}{Y_1 X_1} - Y_1 X_2 + Y_3 X_2 - \textcolor{green}{Y_3 X_3} + \textcolor{red}{Y_2 X_2} - Y_2 X_3 + \textcolor{green}{Y_3 X_3} - Y_3 X_1 + Y_1 X_3 - \textcolor{blue}{Y_1 X_1}) \div 2$$

同じ色で示した部分は打ち消しあうので、

$$S = (Y_2 X_1 - Y_1 X_2 + Y_3 X_2 - Y_2 X_3 - Y_3 X_1 + Y_1 X_3) \div 2$$

X_n で式をまとめます。

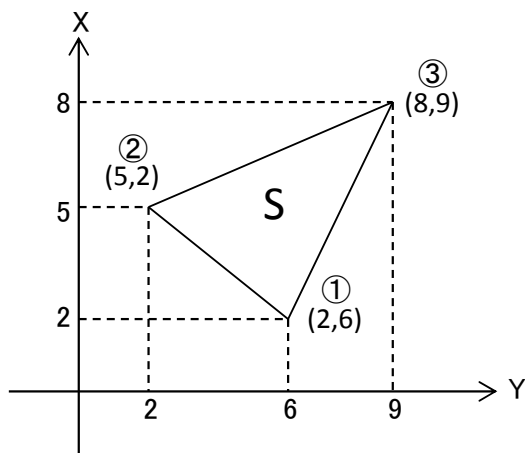
$$S = [(Y_2 - Y_3)X_1 + (Y_3 - Y_1)X_2 + (Y_1 - Y_2)X_3] \div 2$$

この例は三角形についての式なので、 n 角形の式として整理すると、

$$S = \frac{1}{2} \sum (Y_{n+1} - Y_{n-1})X_n$$

座標求積法

実際に計算してみます。



座標リスト

	X	Y
①	2	6
②	5	2
③	8	9

公式

$$S = \frac{1}{2} \sum (Y_{n+1} - Y_{n-1}) X_n$$

※公式による計算

$$S = \frac{1}{2} \sum (Y_{n+1} - Y_{n-1}) X_n$$

$(Y_{n+1} - Y_{n-1}) X_n = A_n$ とおくと、

$$A_1 = (Y_2 - Y_3) \cdot X_1 = (2 - 9) \times 2 = -14$$

$$A_2 = (Y_3 - Y_1) \cdot X_2 = (9 - 6) \times 5 = 15$$

$$A_3 = (Y_1 - Y_2) \cdot X_3 = (6 - 2) \times 8 = 32$$

$$S = \frac{1}{2} (A_1 + A_2 + A_3)$$

$$= \frac{1}{2} (-14 + 15 + 32)$$

$$= \frac{1}{2} \times 33$$

$$= 16.5$$